

# Stabilité globale d'un jet laminaire subsonique

X. GARNAUD, L. LESSHAFFT, P.J. SCHMID, P. HUERRE

Laboratoire d'Hydrodynamique, Ecole Polytechnique – CNRS, 91120 PALAISEAU

## Résumé :

*Des modes globaux d'instabilité sont calculés pour un jet compressible subsonique. La procédure numérique utilisée se base sur l'avancement en temps des équations de Navier–Stokes couplées avec un filtre passe bande, qui permet de sélectionner les fréquences d'intérêt. Des résultats sont présentés pour un jet laminaire issu d'un tuyau circulaire, pour un nombre de Reynolds faible et un nombre de Mach modéré. Pour cet écoulement globalement stable, deux familles de modes sont calculées : à basse fréquence, des modes situés dans la couche de cisaillement se développent dans le jet en aval de la buse. A plus haute fréquence des modes de nature acoustique, localisés principalement dans le tuyau et diffractés au niveau de la buse, ont été calculés.*

## Abstract :

*Global instability modes of a subsonic compressible jet are computed by means of a novel numerical procedure. This procedure relies on time-stepping of the linearized Navier–Stokes equations coupled with a bandpass filter, which allows the selection frequency bands of interest. Results are presented for a laminar jet issuing from a straight pipe, at low Reynolds and moderate subsonic Mach number. The presence of an idealized nozzle is fully accounted for in the calculations. The flow is found to be globally stable. Two families of global modes are detected : low-frequency shear layer modes develop in the free jet just downstream of the nozzle, whereas purely acoustic high-frequency modes are concentrated inside the pipe upstream of the nozzle.*

**Mots clefs :** stabilité globale ; jets ; aéro-acoustique

## 1 Introduction

La génération de bruit dans les écoulements subsoniques est présente dans un grand nombre de situations, et notamment dans le domaine de l'aéronautique. Les mécanismes par lesquels les instationnarités dans les écoulements produisent du bruit restent partiellement incompris. Dans un jet, l'émission de bruit a plusieurs causes : les petites échelles turbulentes sont à l'origine d'un rayonnement sonore caractérisée par un spectre à large bande, alors que les structures cohérentes génèrent un bruit dont le spectre met en évidence une fréquence caractéristique, que l'on associe avec le mode préféré du jet. Cette émission de bruit par les structures cohérentes provient du non-parallélisme de l'écoulement de base ainsi que de l'interaction non-linéaire entre tourbillons dans la couche de cisaillement.

L'objectif de cette étude est de considérer les mécanismes linéaires d'instabilité présents dans un écoulement non-parallèle, ainsi que leur propriétés acoustiques. Pour ce faire, des modes propres de l'écoulement sont calculés dans un cadre axisymétrique.

## 2 Méthode numérique

### 2.1 Configuration

On considère la configuration suivante : un jet, caractérisé par une vitesse maximale  $U_0$ , une densité  $\rho_0$  et une température  $T_0$ , sort d'un tuyau circulaire de diamètre  $R$ . Les conditions à l'extérieur sont données par une vitesse  $u_\infty = 0$ , une température  $T_\infty$  et une densité  $\rho_\infty$ . On se limite à des jets subsoniques, et les équations de Navier-Stokes compressibles sont utilisées ici [9].

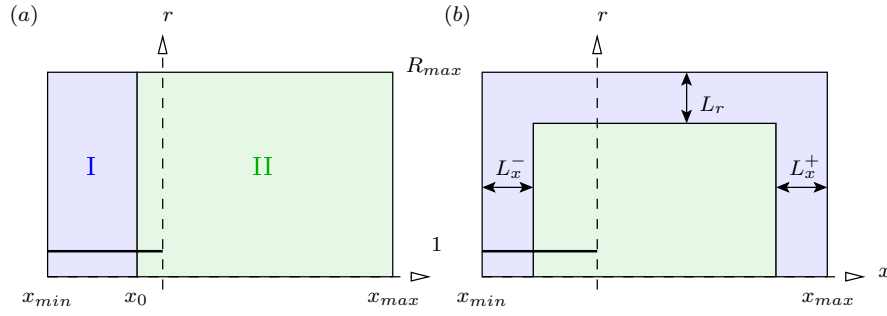


FIGURE 1 – Domaines de calculs employés pour le calcul de l'écoulement de base (a) et des modes de stabilités associés (b). Les longueurs sont adimensionnalisées par le rayon de la buse. Pour les résultats présentés ici, des valeurs de  $x_{min} = -200$ ,  $x_{max} = 300$ ,  $r_{max} = 250$ ,  $x_0 = -2$  et  $L_x^+ = L_x^- = L_r = 150$  sont utilisées.

**Non-dimensionalisation** Les grandeurs  $R$ ,  $U_0$ ,  $\rho_0$  et la vitesse du son sur l'axe du jet  $c_0$  servent de référence pour l'établissement de grandeurs sans dimension. Dans ce cadre, le problème est caractérisé par les nombres sans dimension suivants :

$$\text{Re} = \frac{U_0 R \rho_0}{\mu} = 100, \quad \text{Ma} = \frac{U_0}{c_0} = 0.75, \quad \text{Pr} = \frac{\mu C_P}{\kappa} = 1,$$

Dans ces expressions,  $C_p$  est la chaleur spécifique du fluide à pression constante,  $\mu$  la viscosité dynamique et  $\kappa$  la conductivité thermique. Ces grandeurs sont supposées constantes dans l'écoulement.

L'écoulement est décrit en fonction de ces variables sans dimensions dans un repère cylindrique.  $x$  désigne la direction axiale et  $r$  la direction radiale. On fixe  $x = 0$  à la position où le jet sort du tuyau, et la non-dimensionalisation impose  $r = 1$  à la paroi de la buse.

**Echelles caractéristiques** L'échelle caractéristique de la couche de cisaillement, que ce soit dans le tuyau ou dans le jet libre, est décrite par l'épaisseur de quantité de mouvement

$$\theta = \int_0^\infty \rho u_x (1 - u_x) dr$$

qui est contrôlée par le profil d'entrée imposé. Dans le cas présent,  $\theta$  est de l'ordre de 0.1 au niveau de la buse. Afin de ne pas introduire une échelle supplémentaire pour les structures tourbillonnaires, on considère la buse infiniment fine.

La longueur d'onde d'une onde acoustique de fréquence  $\omega$  en champ libre est donnée par  $\lambda = 2\pi/\text{Ma}/\omega$ , soit pour  $\text{Ma} = 0.75$  des longueurs caractéristiques de l'ordre de 40 pour  $\omega = 0.2$  et de l'ordre de 1.5 pour  $\omega = 5$ .

## 2.2 Discrétisation

Afin de résoudre correctement les échelles caractéristiques de l'écoulement avec relativement peu de points ( $1024 \times 512$  pour les résultats présentés ici), le domaine de calcul est discrétisé au moyen de différences finies centrées à haute résolution [2] sur un maillage rectilinéaire. Ces schémas permettent une bonne résolution de la propagation acoustique jusqu'à 5 points par longueur d'onde. Afin d'assurer la stabilité des simulations temporelles, pour lesquelles l'avancement en temps se fait au moyen d'un schéma de Runge-Kutta explicite d'ordre 3, un filtre spatial est appliqué à la solution de manière à maintenir la stabilité des petites longueurs d'onde [2].

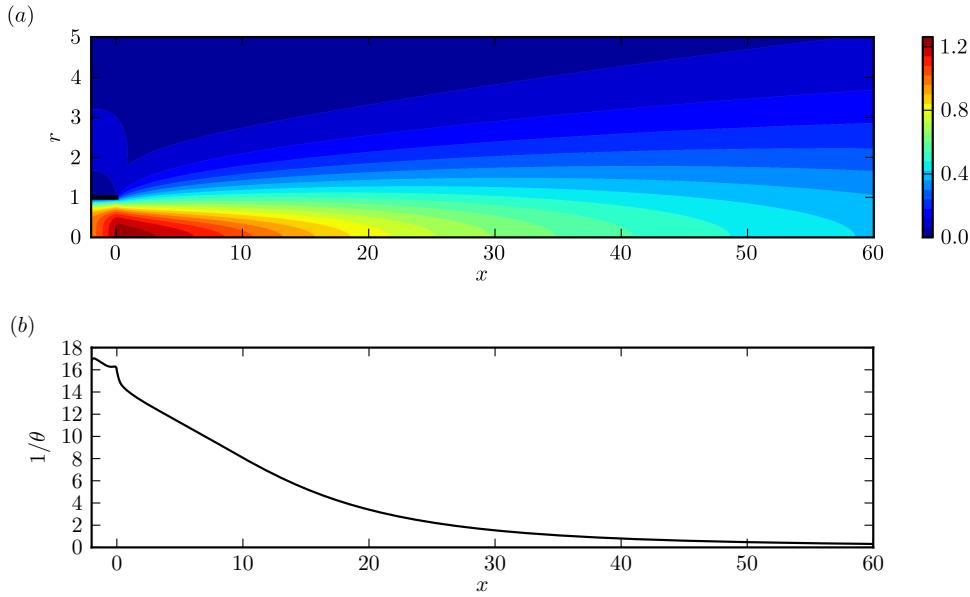


FIGURE 2 – (a) : Champ de vitesse axiale de l'écoulement stationnaire calculé sur le domaine représenté en figure 1 pour un jet isotherme à  $Re = 100$ ,  $Ma = 0.75$ ,  $Pr = 1$ . (b) : distribution axiale de l'épaisseur de quantité de mouvement  $\theta$ .

### 2.3 Écoulement de base

Le calcul de l'écoulement de base stationnaire est calculé au moyen d'une simulation non-linéaire en temps dans laquelle les fréquences non nulles sont filtrées au moyen d'un filtre passe-bas. Cette technique, décrite dans [1], est moins flexible que les méthodes de type Newton-Krylov mais possède l'avantage d'être simple à implémenter et peu consommatrice en ressources.

Le domaine de calcul est représenté en figure 1(a). Les conditions aux limites d'entrée données dans [8] sont implémentées en  $x = x_0$  de manière à permettre un entraînement de l'écoulement à l'extérieur du tuyau. Une valeur de  $x_0 = -2$  a été choisie de manière à prendre en compte le non-parallélisme de l'écoulement proche de la buse tout en gardant un certain contrôle sur le profil de sortie du jet, les effets diffusifs dans le tuyau étant importants pour les nombres de Reynolds et de Mach considérés. Les frontières  $r = r_{max}$  et  $x = x_{max}$  sont également traitées au moyen des conditions aux limites de [8].

La distribution de vitesse axiale, ainsi que l'évolution de l'épaisseur de quantité de mouvement, sont représentés en figure 2. Le fait de considérer des écoulements laminaires fait que la diffusion dans le jet est faible. C'est la raison pour laquelle un faible nombre de Reynolds est utilisé ici, de manière à ce que la longueur du cône potentiel soit de l'ordre d'une dizaine de fois le rayon du jet.

### 2.4 Calcul des modes

Les équations de Navier-Stokes compressibles sont linéarisées autour de l'écoulement stationnaire décrit précédemment afin de calculer les modes propres  $\mathbf{q}$  de cet opérateur linéarisé  $L$ , i.e. :

$$L\mathbf{q} = -i\omega\mathbf{q}.$$

Les vecteurs propres  $\mathbf{q}$  sont des vecteurs d'état contenant toutes les variables à tous les points du maillage, et  $\omega$  est la fréquence propre complexe. Sa partie réelle  $\omega_r$  correspond à une fréquence tandis que sa partie imaginaire  $\omega_i$  correspond à un taux d'amortissement. On se place cependant sur un domaine de calcul différent, de manière à résoudre au mieux l'acoustique associée aux modes. Ainsi des zones éponges sont utilisées pour limiter la réflexion numérique, comme schématisé sur la figure 1(b). Elles sont couplées avec des zones conditions aux limites "non-réfléchissantes" décrites dans [3].

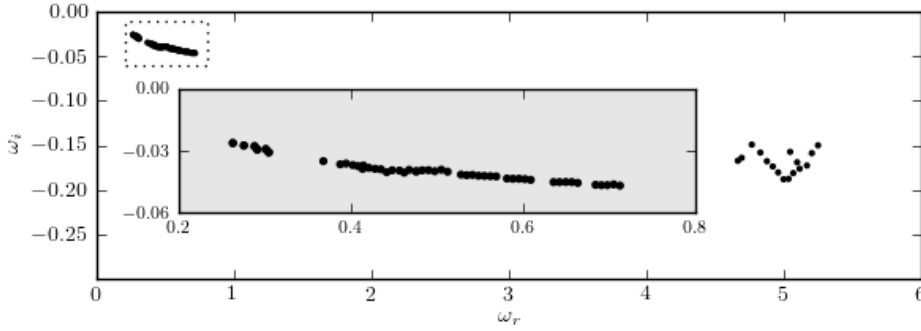


FIGURE 3 – Spectre obtenu pour l'écoulement de base décrit en section 2.3

Alors que pour  $x \geq x_0$  l'écoulement est calculé, il est considéré parallèle pour  $x \leq x_0$  (région I sur la figure 1(a)).

Les modes sont ensuite extraits au moyen de l'algorithme de Krylov-Schur [6]. Afin de calculer les modes physiquement intéressants (qui ici ne sont pas les moins stables), une transformation spectrale est nécessaire. Etant donné les dimensions du domaine de calcul ainsi que l'utilisation de schémas de différences finies ayant un support de 11 points, l'utilisation d'une transformation de type "shift-invert" serait coûteuse, même dans le cas où un solveur itératif serait utilisé. Une alternative à cette méthode, moins flexible mais plus adaptée aux problèmes de grande taille, a été développée. Il s'agit de calculer les modes les plus instables de l'opérateur filtré  $\mathcal{F}$  défini par

$$\mathcal{F} \equiv \left( \begin{array}{c|c} L - \chi \text{Id} & \chi \text{Id} \\ \hline \tau \text{Id} & (-i\omega_0 - \tau) \text{Id} \end{array} \right)$$

avec  $\omega_0 \in \mathbb{C}$  et  $\chi, \tau > 0$  (ce qui peut être effectué en couplant l'algorithme de Krylov-Schur avec un avancement en temps [4]) et d'en déduire ceux de  $L$ . Un choix adapté des paramètres  $\chi$  et  $\tau$  permet de calculer les modes dont la fréquence propre est proche de  $\omega_0$ . Plus de détails pourront être trouvés dans [5].

### 3 Résultats

La méthode décrite ci-dessus a été appliquée pour extraire les modes propres axisymétriques de l'écoulement dans deux intervalles de fréquences, et le spectre correspondant est représenté en figure 3. Tout d'abord, à basse fréquence une première branche de modes est observée. Ces modes, dont la fréquence  $\omega_r = \text{Re}(\omega)$  est comprise entre 0.25 et 0.75, sont caractérisés par un champ de vorticité concentré dans la couche de cisaillement, comme le montre la figure 4. L'étendue des modes dans la direction de l'écoulement est d'autant plus importante que la fréquence du mode est faible et, en accord avec le fait que la vitesse de propagation reste de l'ordre de la vitesse de l'écoulement de base, la longueur caractéristique en  $x$  des structures tourbillonnaires décroît avec la fréquence. Ces résultats sont cohérents avec les résultats d'études locales. Une seconde branche de modes, dont la fréquence est de l'ordre de 5, a été calcul e. Ces modes sont caractérisés par une propagation acoustique dans le tuyau dont le nombre d'onde dans la direction radiale est contraint par la paroi rigide, le nombre d'onde axial étant lui libre de varier. La fréquence caractéristique de ces modes est en accord avec la fréquence correspondant à une propagation dans un tuyau infini dans lequel la vitesse est uniforme, voir par exemple [7]. Au niveau de la buse, cette onde acoustique est diffract e, avec une directivité marqu e (voir le champ de dilatation  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  en figure 5).

### 4 Conclusions

Une nouvelle procédure numérique a été conçue et impl ment e, bas e sur un filtrage spectral de l'opérateur de Navier-Stokes linéarisé, qui permet de calculer les modes globaux d'un jet compressible

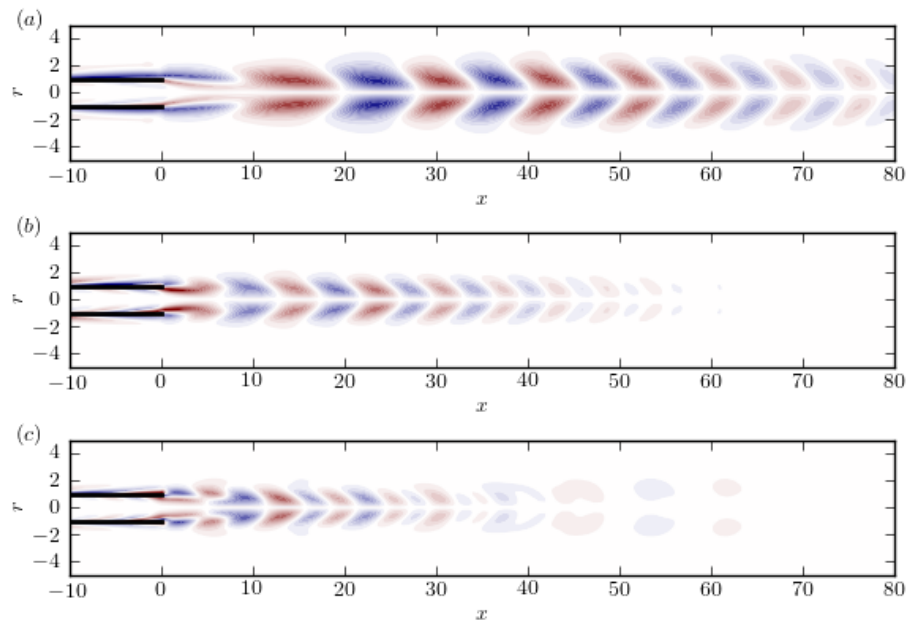


FIGURE 4 – Champs de vorticité associés aux modes de fréquence propre  $\omega_1 = 0.26 - 0.026i$  (a),  $\omega_2 = 0.50 - 0.040i$  (b) et  $\omega_3 = 0.71 - 0.047i$  (c)

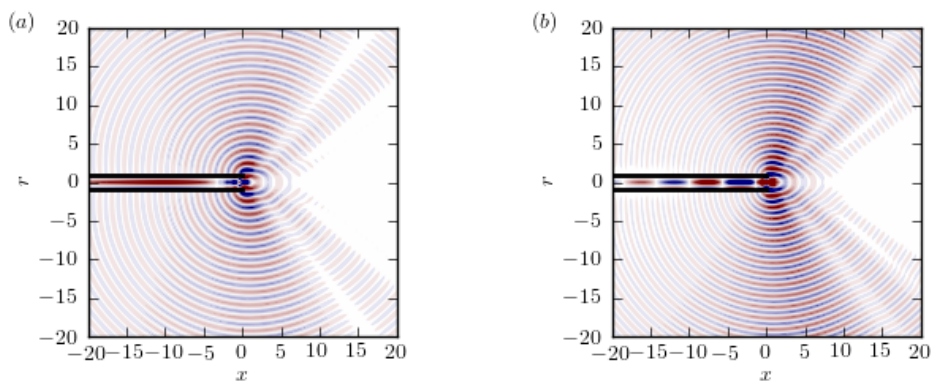


FIGURE 5 – Champs de dilatation associés aux modes de fréquence propre  $\omega_4 = 5.0 - 0.19i$  (a) et  $\omega_5 = 5.8 - 0.23i$  (b)

sur un domaine de grande taille. Les présents calculs ainsi prennent entièrement en compte les effets non-parallèles dûs au développement axial du jet et à la présence d'une buse. Deux familles de modes axisymétriques ont été présentées pour l'exemple d'un jet à  $Re = 100$  et  $Ma = 0.75$ . Une branche, trouvée à basses fréquences  $0.25 \leq \omega \leq 0.75$ , présente les caractéristiques de l'instabilité de la couche de cisaillement. Les perturbations de la vorticité sont concentr es dans la couche de cisaillement de l'écoulement de base. Leur croissance spatiale est confin e à la région immédiatement en aval de la buse, où la couche de cisaillement est mince devant la longueur d'onde des perturbations. Une autre branche de modes, d tect e à des fréquences plus  lev es  $\omega \approx 5$ , correspond aux perturbations de caractère acoustique. Ces perturbations sont concentr es dans le tuyau sous forme d'ondes stationnaires. Leur rayonnement acoustique dans le champ libre est d'une directivité complexe, avec une intensité maximale près de  $90^\circ$  par rapport à la direction du jet.

## Références

- [1] E.  kervik, L. Brandt, D.S. Henningson, J. Hoepffner, O. Marxen, and P. Schlatter. Steady solutions of the Navier-Stokes equations by selective frequency damping. *Phys. Fluids*, 18(6) :068102, 2006.
- [2] J. Berland, C. Bogey, O. Marsden, and C. Bailly. High-order, low dispersive and low dissipative explicit schemes for multiple-scale and boundary problems. *J. Comput. Phys.*, 224(2) :637–662, 2007.
- [3] C. Bogey and C. Bailly. Three-dimensional non-reflective boundary conditions for acoustic simulations : far field formulation and validation test cases. *Acta Acust.*, 88 :463–471, 2002.
- [4] W.S. Edwards, L.S. Tuckerman, R.A. Friesner, and D.C. Sorensen. Krylov methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 110(1) :82–102, 1994.
- [5] X. Garnaud, L. Lesshafft, P. Schmid, P. Huerre, and J.-M. Chomaz. A filtering-based spectral transformation for the solution of large-scale eigenvalue problems arising in linear flow analysis. *to be submitted to Journal of Computational Physics*.
- [6] V. Hernandez, J.E. Roman, and V. Vidal. SLEPc : A scalable and flexible toolkit for the solution of eigenvalue problems. *ACM T. on Math. Software*, 31(3) :351–362, September 2005.
- [7] R. M. Munt. The interaction of sound with a subsonic jet issuing from a semi-infinite cylindrical pipe. *J. Fluid Mech.*, 83(04) :609–640, 1977.
- [8] T.J. Poinsot and S.K. Lele. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *J. Comput. Phys.*, 101(1) :104–129, 1992.
- [9] R.D. Sandberg. Governing equations for a new compressible Navier-Stokes solver in general cylindrical coordinates. Technical Report AFM-07/07, University of Southampton, 2007. Available at <http://eprints.soton.ac.uk/49523/>.